

18/32 ЗК д/неоднород. ур-ния колеб
Ф-ла Даламбера

ЗК д/однород. ур-ния:

$$u_t = a^2 u_{xx}, x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x)$$

Ф-ла Даламбера: $u(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi(x-at) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds, x \in \mathbb{R}, t \geq 0$

Утв $\varphi \in C^2(\mathbb{R}), \psi \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow u(x, t)$ — классическое
реш. ЗК

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0$$

$u = v(x, t) = ?$; $f(x, t)$ задана

Физ. интерпретация. $f(x, t)$ выражает
вынуждающую силу внешнего воздействия

бий на струну

Считаем $f(x, t)$ удовлетворяющей всем
необх. требованиям

Введем нар-р $a \geq 0$ и x вспомогат. ЗК
со сдвинутым временем

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t \geq a \\ v|_{t=a} = 0, & v_t|_{t=a} = f(x, a) \end{cases} \quad (2)$$

Подробнее: $v = v(x, t; a), x \in \mathbb{R}, t \geq a \geq 0$

$$\begin{cases} v_{tt}(x, t; a) = a^2 v_{xx}(x, t; a), & x \in \mathbb{R}, t \geq a, \\ v(x, a; a) = 0, & v_t(x, a; a) = f(x, a) \end{cases} \quad (2)$$

$$v(x, a; a) = 0, \quad v_t(x, a; a) = f(x, a)$$

Составим спец. $\int$ - интеграл Дюамеля

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t; \alpha) d\alpha, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (3)$$

$$v(x, t; \alpha) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\alpha)}^{x+a(t-\alpha)} f(s, \alpha) ds, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq a \geq 0 \quad (4)$$

! зам Ф-на (3) корректна, т.к. ор-ние
 $0 \leq \alpha \leq t$ (см. (4)) в ней вып-ся

Дифф-м Ф-лу (3).

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \underbrace{v(x, t; t)}_{=0 \text{ (см. (2))}} + \int_0^t v_t(x, t; \alpha) d\alpha = \\ &= \int_0^t v_t(x, t; \alpha) d\alpha \quad (5) \end{aligned}$$

$$u_{tt}(x, t) = \cancel{v_t(x, t; t)} \xrightarrow{f(x, t) \text{ (см. (2))}} + \int_0^t v_{tt}(x, t; \alpha) d\alpha = f(x, t) +$$

$$+ \int_0^t \varphi_{tt}(x, t; \alpha) d\alpha$$

$$u_{xx}(x, t) = \int_0^t \varphi_{xx}(x, t; \alpha) d\alpha$$

$$\Rightarrow u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t) + \int_0^t \underbrace{(\varphi_{tt}(x, t; \alpha) - a^2 \cdot \varphi_{xx}(x, t; \alpha))}_{=0 \text{ (см. (2))}} d\alpha = f(x, t)$$

В рез-те д/ф-ции (3) вып-ся ур-ние:
 $u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t), x \in \mathbb{R}, t \geq 0$
 (неоднород. ур-ние кеп. струны)

При этом $u(x, 0) = 0, x \in \mathbb{R}$ (см. (3)); $u_t(x, 0) = 0, x \in \mathbb{R}$ (см. (5))

Все соотнош-я в (1) выполненные, получим нужное решение. Его окончательный вид (подставим (4) в (3)): $u(x, t) =$
 $= \int_0^t \left(\frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\alpha)}^{x+a(t-\alpha)} f(x, s) ds \right) d\alpha = \int_0^t \alpha \mapsto \tau -$
 $- \text{д/красоты} \} = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s, \tau) ds - \text{оконча-}$
 тельный вид $\int$ -на Даламбера (6), $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$

$\Downarrow$ $f, f_x \in C(\mathbb{R}[0; +\infty))$. Тогда ф-ла (6) определяет классич. р-м. $u \in C^{2,2}(\mathbb{R} \times [0; +\infty))$
 ЗК(1)

▲ При указ. условиях ф-ция $v(x, t; \alpha)$ из ф-лы (4), а с ней и ф-ция $u(x, t)$ из ф-лы (3) имеют гладкость C^2 по перем. $x \in \mathbb{R}$ и $t \geq 0$ в силу св-в ф-лы Даламбера. Все пред. выкладки явл-ся законными и ф-ла (6) $\sim$ (3) + (4), т.е. (6) определяет классич.

реш. зад (1) ■

Упр. * ЗК:
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2|x|, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Найти ответ по ф-ле (6) и убедиться, что $u \in C^{2,2}(\mathbb{R} \times [0; +\infty))$, исследовав особенности производных данной ф-ции